泛函导论 Erwin

1.5

深度学习的数学知识壁垒不会是泛函而非线性代数吧?

这节符号看着头疼本来想跳的，但看到下节也是完备性就知道这玩意重要了，只能硬着头皮看。

虽然实际上挺简单的,1.5-1、1.5-2 和 1.5-4 的核心思想都是按每个维度拆除来看,细枝末节不重要。

1.5-3 很绕,可以概括为一个由收敛序列组成的收敛序列,收敛到一个收敛序列。(其实这里闭包没用)

一致收敛问了 ai，关于所谓收敛速度不一致为什么不能取每个点的 N 的 max，是因为一个无限集虽然可能每个数都是有限的，但也可以没有上确界。

1.5-7 构造一个 $x_n = \frac{\lfloor \pi\times 10^n \rfloor}{10^n}$ 即可。

1.5-8 多项式拟合神教哈哈哈，超绝大闭包

1.5-9 的叙述有点怪? 但懒得想了。

习题

1. 简单，略。
2. 取 X 中元素组成的任意 Cauchy 序列 $(x)_n$，满足对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $N > 0$ 使得对任意 $n, m > N$ 都有 $d(x_n, x_m) = \max_j \left|\zeta_j^n - \zeta_j^m\right| < \varepsilon$，可以导出对任意 j 有 $\left|\zeta_j^n - \zeta_j^m\right| < \varepsilon$，故 $\left(\zeta_j^{1,2,3,\ldots,\infty}\right) \to \zeta_j$，可以定义 $\hat{x} = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$，…………不写了。
3. 考虑 l^∞ 的度量 $\sup_j\left|\xi_j - \eta_j\right|$,可以构造 $x_1 = (1, 0, 0, \ldots), x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right), x_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \ldots\right), \ldots$，在这样的度量下，我们构造的这个序列明显是柯西序列，然而它却收敛到一个有无限个非零项的序列。
4. 不也一样吗。
5. 这个度量下的柯西序列中必然存在 $|n - m| < 1 \to n = m$，因此收敛到的也是整数
6. 注意 $\arctan x$ 是有上确界的，所以可以很自然地让 $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ 成为这个度量下的柯西序列，但这个序列即使在这个度量也下并不收敛到某个实数。
7. 这个和上题差不多。
8. 对于度量 $\max_{j\in J}|x(j) - y(j)|$，$Y$ 中的柯西序列 $(x)_n$ 满足 $\left|x_n(j) - x_m(j)\right| < \varepsilon$ (原谅我省略了一些叙述)，包括 $j = a \vee b$ 的时候，故此一致收敛是有的，而收敛到的这个 x，也有 $|x(a) - x(b)| \leqslant \left|x(a) - x_n(a)\right| + \left|x_n(a) - x_n(b)\right| + \left|x_n(b) - x(b)\right| = 2\varepsilon$（原谅我省略了太多叙述，但实在麻烦）
9. 连续函数序列 $(x)_n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $n, m > N$ 使得对所有 $j \in [a, b]$ 有 $\left|x_n(j) - x_m(j)\right| < \varepsilon$ (实际上这个度量就蕴含了一致收敛)，至于连续性的证明，还是三角不等式。$\left|x(j_0) - x(j)\right| \leqslant \left|x(j_0) - x_n(j_0)\right| + \left|x_n(j_0) - x_n(j)\right| + \left|x_n(j) - x(j)\right| = 3\varepsilon$
10. 见习题 5.
11. 其实看度量函数就知道，收敛还是要个个过关，虽然后面的项权重很小，但还是要。从 $\frac{1}{2^j}\frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|} < \varepsilon$ 可以推出 $|\xi_j - \eta_j| < \begin{cases} \frac{2^j\varepsilon}{1 - 2^j\varepsilon} & \text{当 } 2^j\varepsilon < 1 \\ +\infty & \text{当 } 2^j\varepsilon \geqslant 1 \end{cases}$，证毕；另一个方向，虽然不是一致收敛，但后面的项权重越来越小，也是可以收敛的。
12. 显而易见
13. 想象不出来，geogebra 也画不出来……饿啊啊
14.

15. 巴塞尔问题的余项收敛到零，因此是柯西序列。至于不收敛是显然的。

看看答案。

14 题看着头疼不妨跳过。我的风格似乎还不太喜欢应用尽用前面给到的定理而是硬上，看来还是毒打吃少了。

参考文献